Empfehlungen zur Behandlung der Kombinatorik

STEFAN BARTZ, MECKEL

Zusammenfassung: *Gründet ein Stochastiklehrgang stark auf der Laplace-Wahrscheinlichkeit, müssen häufig interessierende und mögliche Ausgänge abgezählt werden. Die Kombinatorik muss in einem solchen Lehrgang zwangsläufig eine tragende und zentrale Rolle spielen. Wird der Lehrgang dagegen auf Baumdiagramme – also auf den Ansatz, Ereignisse generell in einzelne Schritte zu zerlegen – gegründet, kann die Behandlung von kombinatorischen Verfahren in den Hintergrund treten.*
Anhand des Spiel 77 und basierend auf dem sehr hilfreichen Artikel von Althoff (2012) können die spezifischen Eigenarten beider Ansätze gut miteinander verglichen und Empfehlungen für die Behandlung der Kombinatorik innerhalb eines Stochastiklehrgangs abgeleitet werden.

Das Spiel 77

Ich erhalte einen entsprechenden Gewinn, wenn 1, 2, …, 7 Endziffern meines Lottoscheins mit denen der gezogenen 7-stelligen Zahl übereinstimmen.

Die Wahrscheinlichkeiten[1] für die einzelnen Gewinnklassen sind schnell notiert:

richtige Endziffern	Gewinn in €	W keit
1	5	$1/10^1$
2	17	$1/10^2$
3	77	$1/10^3$
4	777	$1/10^4$
5	7.777	$1/10^5$
6	77.777	$1/10^6$
7	~ 1.000.000	$1/10^7$

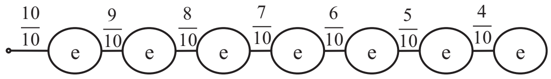
Wie lassen sich jedoch die Wahrscheinlichkeiten ermitteln, dass in der gezogenen Zahl mehrfachvorkommende Ziffern auftreten? Folgende 15 Ereignisse können dabei unterschieden werden:

Ereignisse	Beispiel-Zahlen
$7e$	8391652
$5e1z$	8391658
$4e1d$	8391688
$3e2z$	8391683
$3e1v$	8391888
$2e1z1d$	8391833
$2e1f$	8398888
$1e3z$	8391839
$1e1z1v$	8398333
$1e2d$	8398833
$1e1s$	8388888
$2z1d$	8398399
$1z1f$	8383333
$1d1v$	8388333
$1s$	8888888

Beim Ereignis $5e1z$ kommen in der 7-stelligen Zahl also 5 Ziffern einfach und 1 Ziffer zweifach, beim Ereignis $3e2z$, 3 Ziffern einfach und 2 zweifach vor, und zwar jeweils in beliebiger Reihenfolge.

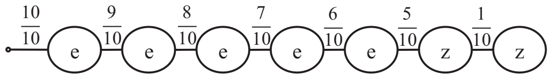
Lösung mit Baumdiagrammen

E: Ich ziehe 7e.



$$P(E) = \left(\frac{10}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{10}\right)\cdot\frac{7!}{7!}$$

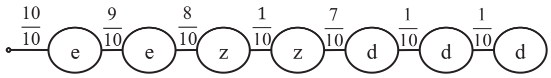
E: Ich ziehe 5e und 1z.



$$P(E) = \underbrace{\left(\frac{10}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{10}\right)}_{\text{Wk der interess. Pfade}}\cdot\frac{7!}{5!2!}$$

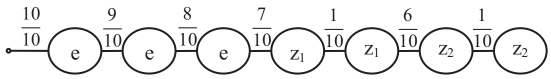
Anzahl der interess. Pfade

E: Ich ziehe 2e, 1z und 1d.



$$P(E) = \left(\frac{10}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\right)\cdot\frac{7!}{2!2!3!}$$

E: Ich ziehe 3e und 2z.



$$P(E) = \left(\frac{10}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\boxed{\frac{1}{2!}}\right)\cdot\frac{7!}{3!2!2!}$$

Korrekturfaktor

Erläuterungen zum Vorgehen

- Gemäß des Standardlösungsverfahrens (Bartz 2008) wird zuerst das interessierende Ereignis exakt formuliert. Dann werden die dazu passenden, interessierenden Baumpfade mitsamt der jeweiligen Astwahrscheinlichkeiten schrittweise notiert (die nicht-interessierenden Pfade können weggelassen werden). Zum Schluss wird P(E) durch Addition der Pfadwahrscheinlichkeiten bestimmt.
- Bei großen Baudiagrammen, sogenannten Mammutbäumen (Bartz 2009), versucht man, möglichst viele interessierende Pfade *zusammenzufassen*. Das gelingt z. B. beim Ereignis $5e1z$ durch die Knoteneinträge „e“ und „z“, über die sich alle

Einfach-Ziffern bzw. Zweifach-Ziffern, die am jeweiligen Knoten möglich sind, bündeln lassen.

- Neben dem vertikalen Bündeln einzelner Knoteneinträge pro Baumstufe, versucht man Mammutbäume auch dadurch handhabbar zu machen, dass möglichst nur ein einziger Pfad, stellvertretend für alle interessierenden, betrachtet wird. Auch das gelingt beim Spiel 77. Da alle interessierenden Pfade die gleiche Pfadwahrscheinlichkeit besitzen, genügt es, *einen einzigen* zu betrachten. Wir haben uns beim Ereignis 5*e*1*z* für denjenigen entschieden, bei dem die beiden Zweifach-Ziffern am Ende stehen. Anhand dieses Stellvertreters wird dann ermittelt, wie viele interessierende Pfade es insgesamt gibt. Wären beim Ereignis 5*e*1*z* alle Knoteneinträge des Stellvertreterpfades unterschiedlich, würden *7!* Pfade existieren. Da aber je 5 und 2 der Knoteneinträge gleich sind (5-mal „e“ und 2-mal „z“), reduziert sich die Anzahl um jeweils *5!* und *2!*. Ergibt insgesamt $\frac{7!}{5! \cdot 2!}$ interessierende Pfade.
- Wieso muss bei Ereignissen mit gleich langen Wiederholsequenzen, z. B. beim Ereignis 3*e*2*z*, ein Korrekturfaktor eingefügt werden? Für z_2 sind dann nur Ziffern erlaubt, die größer als die bei z_1 sind. So darf beispielsweise der Fall ($z_1 = 3$ | $z_2 = 4$) nicht gezählt werden, da er dem Fall ($z_1 = 4$ | $z_2 = 3$) entspricht. Für z_2 gibt es somit nicht jeweils 6 mögliche Einträge – wie vorher bestimmt –, sondern nur halb so viele.

Lösung mit Binomialkoeffizienten

E: Ich ziehe 7e.

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \underbrace{\binom{10}{7}}_{|E_{Au}|} \cdot \underbrace{\binom{7}{7} \cdot 7!}_{|E_{An}|} \cdot \underbrace{\frac{1}{10^7}}_{|\Omega|}$$

E: Ich ziehe 5e und 1z.

$$P(E) = \underbrace{\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{1}}_{|E_{Au}|} \cdot \underbrace{\binom{7}{5} \cdot 5! \cdot \binom{2}{2}}_{|E_{An}|} \cdot \underbrace{\frac{1}{10^7}}_{|\Omega|}$$

E: Ich ziehe 2e, 1z und 1d.

$$P(E) = \underbrace{\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{1} \cdot \binom{7}{1}}_{|E_{Au}|} \cdot \underbrace{\binom{7}{2} \cdot 2! \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3}}_{|E_{An}|} \cdot \underbrace{\frac{1}{10^7}}_{|\Omega|}$$

E: Ich ziehe 3e und 2z.

$$P(E) = \underbrace{\binom{10}{3} \cdot \binom{7}{2}}_{|E_{Au}|} \cdot \underbrace{\binom{7}{3} \cdot 3! \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}_{|E_{An}|} \cdot \underbrace{\frac{1}{10^7}}_{|\Omega|}$$

Erläuterungen zum Vorgehen

- Da beim Spiel 77 alle gezogenen 7-stelligen Zahlen gleich wahrscheinlich sind, lässt sich P(E) mit $\frac{|E|}{|\Omega|}$, also mit der Anzahl der interessierenden Ausgänge, und der Anzahl aller möglichen bestimmen.
- |E| wird in zwei Schritten ermittelt. Zuerst werden die *Auswahlmöglichkeiten* $|E_{Au}|$ für die 7 Ziffern –ohne Berücksichtigung der Reihenfolge – bestimmt. Dann werden die *Anordnungsmöglichkeiten* $|E_{An}|$ all dieser Zifferkombinationen auf 7 Plätze ermittelt.
- So gibt es beim Ereignis 2*e*1*z*1*d* insgesamt $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{1} \cdot \binom{7}{1} = 2520$ *Auswahlmöglichkeiten*: Zuerst werden die Möglichkeiten berechnet, 2 Einfach-Ziffern aus den 10 Kugeln auszuwählen, dann die Möglichkeiten, eine Zweifach-Ziffer aus den verbleibenden 8 Kugeln und schließlich eine Dreifach-Ziffer aus den übrigen 7 Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen. (Für die restlichen Zweifach- und Dreifach-Ziffern gibt es jeweils $\binom{1}{1}$ Möglichkeiten, sie sind aus Übersichtsgründen nicht aufgeführt.)
- Dann wird berechnet, auf wie viele Arten sich jede dieser 2520 Ziffernkombinationen auf 7 Plätzen anordnen lässt: Die 2 *unterschiedlichen* Einfach-Ziffern lassen sich auf $\binom{7}{2} \cdot 2!$ Möglichkeiten auf den 7 Plätzen anordnen, die beiden *gleichen* Zweifach-Ziffern lassen sich auf $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten auf die verbleibenden 5 Plätzen anordnen. Die 3 gleichen Dreifach-Ziffern können schließlich auf alle übriggebliebenen Plätze geschoben werden. Für sie ergeben sich nur noch $\binom{3}{3}$, also *eine* Anordnungsmöglichkeit.
- **Beachte:** Binomialkoeffizienten können für Auswahlmöglichkeiten *und* für Anordnungsmöglichkeiten stehen:

  aus 7 Kugeln 2 *ungleiche* ohne Reihenfolge auswählen $\rightarrow \binom{7}{2} \leftarrow$ auf 7 Plätzen 2 *gleiche* Einträge anordnen

  Wichtig ist, dass der Binomialkoeffizient nur dann verwendet wird, wenn tatsächlich *ohne* Reihenfolge und Zurücklegen gezogen wird, bzw. wenn tatsächlich *gleiche* Einträge angeordnet werden. Müssen dagegen 2 *ungleiche* Einträge angeordnet werden, wie oben bei den *2* Einfach-Ziffern, muss der Binomialkoeffizient um den Faktor *2!* ergänzt werden.

Vergleich

Für den zweiten Lösungsweg müssen die Schüler mit Anordnungs- *und* Auswahlverfahren vertraut sein und beide Modelle im Zusammenspiel achtsam anwenden können. Es ist schwierig zu erkennen, *warum* die Ereignisse in Klassen (e, z, d, …) zerlegt werden müssen und warum dann für jede Klasse einzeln, *innerhalb* der Klasse jedoch mit „einem Griff" ausgewählt werden muss. (Warum müssen z. B. die Auswahlmöglichkeiten beim Ereignis $2e1z1d$ mit $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{1} \cdot \binom{7}{1}$ und nicht mit $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2}$, wie beim Ereignis $3e2z$ bestimmt werden?)

Der zweite Lösungsweg erfordert recht umfangreiche kombinatorische Kenntnisse. Er eignet sich vor allem, um fortschrittliche Abzähltechniken, etwa im Rahmen eines weiterführenden Kombinatorik-Exkurses (s. u.) zu trainieren.

Dagegen kann der erste Lösungsweg bereits von Anfängern bewältigt werden. Dadurch, dass das interessierende Ereignis anhand eines Baumdiagramms in Teilereignisse zerlegt wird, brauchen keine komplexen *Auswahlmöglichkeiten* mehr abgezählt zu werden, es genügt, die *Anordnungsmöglichkeiten* der Knoteneinträge zu bestimmen. Die Verringerung des kombinatorischen Aufwands ist durch den Mehraufwand, der mit der Zerlegung des Ereignisses verbunden ist, „erkauft". Der Zerlegungsansatz ist damit der Schlüssel, mit dem komplexere kombinatorische Inhalte aus dem Stochastiklehrgang ausgelagert werden können.

Empfehlungen zur Kombinatorik

Anhand beider Lösungsansätze ist deutlich geworden, dass der Zugang über Baumdiagramme (i) mathematisch weniger voraussetzungsreich ist, weil lediglich einfache kombinatorische Anordnungsverfahren benötigt und auf Binomialkoeffizienten verzichtet werden kann, (ii) strukturierter ist, weil die Kugeln der Reihe nach gezogen werden und (iii) lernökonomisch sinnvoller ist, weil Baumdiagramme in der Stochastik weiterführen. Damit ergeben sich folgende Empfehlungen für die Behandlung der Kombinatorik im Stochastikunterricht:

- In den ersten 3 Kapiteln eines Stochastiklehrgangs geht es um das Vorhersagen von Wahrscheinlichkeiten anhand von „Einfachen Bäumen", „Mammutbäumen" und „Bedingten Bäumen". Die Kombinatorik sollte in das Kapitel „Mammutbäume" eingebettet sein und nur dazu dienen, die Anzahl der interessierenden Pfade mit Hilfe von Stellvertreterpfaden zu bestimmen. Dazu wird lediglich die *Fakultät* benötigt. Sie kann anhand von Wahrscheinlichkeitsaufgaben, bei denen z. B. 5 unterschiedliche Knoteneinträge auf 5 Knotenplätzen anzuordnen sind, eingeführt werden. Gleichzeitig lässt sich der Binomialkoeffizient vorbereiten, indem man die Aufgabe so abändert, dass von den 5 Knoteneinträgen je 2 und 3 gleich sind.
- Auf die abkürzende Schreibweise $\binom{5}{2}$ und den Begriff *Binomialkoeffizient* sollte zu Beginn jedoch vollkommen verzichtet werden. Die Fakultätsschreibweise $\frac{5!}{2! \cdot 3!}$ zeigt viel deutlicher, *wie* die ursprüngliche Anordnungsanzahl durch die 2 und 3 gleichen Einträge reduziert wird. So wird klar, dass bei 9 Plätzen und 2, 3 und 4 gleichen Knoteneinträge folglich $\frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!}$ Anordnungsmöglichkeiten vorliegen müssen. *Binomial-* und *Polynomialkoeffizient* lassen sich so gemeinsam vorbereiten.
- Im 4. Kapitel, der „Binomialverteilung", können der Begriff *Binomialkoeffizient* und die abkürzende Schreibweise offiziell eingeführt und dessen algebraische Bedeutung anhand des Pascalschen Dreiecks deutlich gemacht werden.
- In Kapitel 5, bei der Hypergeometrischen Verteilung[2], geht es dann zum ersten Mal um *Auswahlmöglichkeiten*. Anhand des Funktionsterms
$$\frac{\binom{R}{x} \cdot \binom{N-R}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$
wird erkannt, dass der Binomialkoeffizient auch als Anzahl von *Auswahlmöglichkeiten* (aus einer Urne mit ungleichen Kugeln) aufgefasst werden kann.
- Am Ende des gesamten Stochastiklehrgangs, etwa im Rahmen eines Abitur-Vorbereitungstrainings[3], kann schließlich ein kleiner, 1–2 stündiger Exkurs „Kombinatorik" angeboten werden, in dem ein systematischer Überblick über das Abzählen bei Anordnungs- und Auswahlsituationen gegeben wird.

Kombinatorik-Exkurs

Auch ein dem eigentlichen Stochastiklehrgang angehängter Exkurs sollte mit den Anordnungsproblemen beginnen. Im Schulbereich genügt es, wenn 4 Anordnungssituationen abgezählt werden können:

1	Anordnung von 5 versch. Einträgen auf 5 Plätzen	$5!$
2	Anordnung von 2 versch. Einträgen auf 5 Plätzen	$\frac{5!}{3!}$
3	Anordnung von 2 gl. Einträgen auf 5 Plätzen	$\frac{5!}{3!\cdot 2!}$
4	Anordnung von 8 gl. Einträgen auf 5 Plätzen	$\frac{(8+4)!}{8!\cdot 4!}$

Tab. 1: Anordnungsmöglichkeiten

Im 1. Fall werden die 5 Plätze *vollständig*, im 2. und 3. Fall *unvollständig* und im 4. Fall *mehrfach* besetzt. In Fall 2 und 3 können die unbesetzten, leeren Plätze als gleiche Einträge interpretiert werden, die zugehörenden Formeln lassen sich mit diesem Hinweis direkt nachvollziehen. Im 4. Fall kann man sich vorstellen, dass die 5 Plätze mit 4 Trennstrichen markiert und die 8 gleichen Einträge links oder rechts von den einzelnen Trennstrichen platziert sind. Insgesamt liegen so 12 Objekte – je 8 und 4 gleiche – vor, von denen man wissen will, auf wie viele Arten sie sich auf 12 Plätze anordnen lassen; bekanntermaßen gibt es dafür $\frac{12!}{8!\cdot 4!}$ Möglichkeiten.

Um von den Anordnungs- zu den Auswahlmöglichkeiten zu gelangen, stellt man sich vor, dass die Platzzuweisung dadurch erfolgt, dass für jeden Eintrag eine „Platznummer" aus einer Urne mit 5 nummerierten Kugeln gezogen wird. Jeder Anordnungsfall von Tabelle 1 wird so in einen entsprechenden Auswahlfall überführt:

1	Auswahl von 5 nummerierten Kugeln aus 5 ohne Zurücklegen / mit Reihenfolge	$5!$
2	Auswahl von 2 nummerierten Kugeln aus 5 ohne Zurücklegen / mit Reihenfolge	$\frac{5!}{3!}$
3	Auswahl von 2 nummerierten Kugeln aus 5 ohne Zurücklegen / ohne Reihenfolge	$\frac{5!}{3!\cdot 2!}$
4	ohne Reihenfolge Auswahl von 8 nummerierten Kugeln aus 5 mit Zurücklegen mit Reihenfolge	$\frac{(8+4)!}{8!\cdot 4!}$ 5^8

Tab. 2: Auswahlmöglichkeiten

Wurden vorhin k *ungleiche/gleiche* Einträge auf 5 Plätzen mit *einfach/mehrfach Besetzung* angeordnet, so werden nun k Kugeln *mit/ohne Reihenfolge* aus einer 5er Urne *ohne/mit Zurücklegen* ausgewählt. Obwohl Anordnungs- und Auswahlfälle übereinstimmen und nur unterschiedliche Sichtweisen auf ein und denselben Zusammenhang bilden, können sich Schüler Tabelle 1 deutlich besser und nachhaltiger einprägen als Tabelle 2. Folgende Gründe könnten dafür u. a. verantwortlich sein:

- k Objekte auf 5 Plätze auf einem Tisch neu anzuordnen, ist ein recht überschaubarer und leicht durchführbarer Vorgang. Dagegen ist der Auswahlvorgang deutlich komplexer. Bei ihm muss man eine Kugel aus einer 5er Urne ziehen, sich die Nummer auf einem Blatt Papier notieren, die Kugel zurück- oder weglegen, das ganze *k-1*-mal wiederholen und sich schließlich überlegen, ob die notierte Zahlenfolge mit oder ohne Reihenfolge betrachtet werden soll (was ja an sich wieder ein Anordnungsproblem darstellt).
- Im Anordnungsmodell ist klar, dass alle Plätze verschieden sind. Beim Auswahlmodell muss man sich dagegen explizit merken, dass die Kugeln *in* der Urne immer unterschiedlich nummeriert, also generell verschieden sein müssen.

Die großen Probleme, die beim Erfassen von Tabelle 2 auftreten, lassen sich nicht durch Umsortieren (s. Abb.) beheben. Auch hier wissen Schüler nach kurzer Zeit nicht mehr, ob die „mit"-Fälle oben, unten, links oder rechts stehen und zu welcher Formel jeweils gehören. Hinzu kommt, dass bei dieser Darstellung nicht mehr erkennbar ist, wie sich die Formeln sukzessive aufbauen: vom Permutations- (1) zum Variations- (2) und Kombinationsfall (3), hin zum Mehrfachbesetzungsfall (4). Einen *nachhaltigen* Überblick über Anordnungs- und Auswahlsituationen erhalten Schüler daher eher, wenn sie sich Tabelle 1 einprägen und daraus Tabelle 2 bei Bedarf ableiten.

		Reihenfolge ohne	**Reihenfolge** mit
Zurücklegen	ohne	$\frac{5!}{3!\cdot 2!}$	$\frac{5!}{3!}$
Zurücklegen	mit	$\frac{(8+4)!}{8!\cdot 4!}$	5^8

Fazit

Wird nicht die *Abzählidee* (mit Laplace-Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik), sondern die viel breiter einsetzbare *Zerlegungsidee* (mit Standardlösungsverfahren und Baumdiagramm) in das Zentrum des Stochastiklehrgangs gestellt, so wird nur noch das Anordnungsmodell benötigt. Komplexere kombinatorische Betrachtungen können ausgelagert und die eigentlichen stochastischen Kerninhalte klarer herausgestellt werden.

Die gezielte Ausrichtung des Stochastiklehrgangs auf den *Zerlegungsansatz* führt nicht nur hier zu einer spürbaren didaktischen Entlastung. Auch bei den Themen „Bedingte Wahrscheinlichkeit", „Umgang mit Verteilungen" sowie „Schätzen und Testen von Wahrscheinlichkeiten" kann über diesen Ansatz ein beachtlicher Zugewinn an Klarheit und Sicherheit erreicht werden (Bartz 2008).

Unabhängig davon, *wie* der Stochastiklehrgang letztendlich konzipiert ist: das Abzählen im Anordnungs- und im Auswahlmodell sollte *immer* klar auseinander gehalten und deutlich voneinander getrennt eingeführt werden.

Anmerkungen

1 In der Tabelle sind die Wahrscheinlichkeiten für *mindestens* k richtige Endziffern, also $P(X \geq k)$, angegeben. Für *genau* k richtige Endziffern müsste jeweils mit 0,9 multipliziert werden, da die „*k + 1*"-te Endziffer dann zusätzlich falsch sein müsste. Etwa im Fall k = 3: $P(X = 3) = 0{,}1^3 \cdot 0{,}9$.

2 Die Hypergeometrische Verteilung spielt eine Schlüsselrolle beim Erlernen des sicheren Umgangs mit Verteilungen. Es ist ein großer Fehler, dass diese Verteilung aus den Lehrplänen einiger Bundesländer entfernt worden ist.

3 Abiturvorbereitungen lassen sich sehr effizient mithilfe von Altabituren gestalten. Besonders gut eignen sich dazu die bayrischen, die *alle* unter www.abiturloesung.de im Internet in Videos vorgerechnet werden. Wer mit seinen Schülern die 20 Altabiture der letzten 10 Jahre intensiv trainieren will, ist auf die Inhalte des dargestellten Kombinatorik-Exkurses angewiesen. Im Grundkursbereich wird der Exkurs nicht benötigt.

Literatur

Althoff H. (2012): Die Berechnung von Anzahlen und Wahrscheinlichkeiten im Spiel 77. In: *Stochastik in der Schule* 32(2).

Bartz S. (2008): Baumdiagramme als roter Faden der Schulstochastik. In: *Stochastik in der Schule* 28(1). www.stefanbartz.de/materialien.htm

Bartz S. (2009): Was tun bei Mammutbäumen? In: *Stochastik in der Schule* 29(1).

Anschrift des Verfassers

info@stefanbartz.de